Litt meir om varians

$$E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

$$= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = \underline{E[X^2] - \mu^2}$$

X, Y uavh.

$$Var[X - Y] = Var[X] + (-1)^2 Var[Y] = Var[X] + Var[Y].$$

Generelt

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j \, Cov(X_i, X_j)$$

Dersom $X_1, \ldots, X_n$ er uavh så er

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$$

Kap 5. Nokre diskrete sannsynsfordelingar

Uniform diskret fordeling

X tek verdiane $x_1, \ldots, x_k$

$$f(x_i; k) = P(X = x_i) = \frac{1}{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

Vi får $E[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i = \mu$

$$\sigma^2 = Var[X] = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} (x - \mu)^2$$

Eks. terningkast

$$f(x, 6) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6$$

$$\mu = E[X] = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 3.5$$

$$\sigma^2 = Var[X] = \frac{1}{6}\{(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2$$
$$+ (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2\} = \frac{17.5}{6} = 2.9 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2.9} = 1.7$$

5.2 Binomisk fordeling

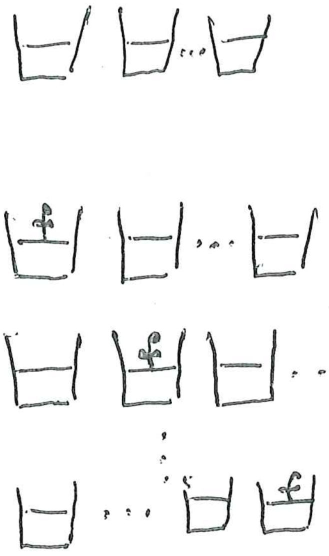
Situasjonar: fiskar, skyt på blink, myntkast

Eks. Sår n frø og vil finne sannsynet for at k stykker spirer. Kvart frø spirer uavh. av dei andre med eit visst sannsyn p.

La A v hendinga at eit frø spirer

La X v talet på frø som spirer.

$X=0$



$P(X=0) = P(\text{ingen frø spirer}) = P(A' \cap A' \cap \cdots \cap A')$

$= P(A')^n = (1-p)^n$

$A \cap A' \cap \cdots \cap A'$

$A' \cap A \cap A' \cap \cdots \cap A'$

$A' \cap \cdots \cap A' \cap A$

$P(\text{eit frø spirer}) = P(X=1)$

$= P(A \cap A' \cap \cdots \cap A') + P(A' \cap A \cap A' \cap \cdots \cap A')$

$+ \cdots + P(A' \cap A' \cap \cdots \cap A' \cap A)$

$= p(1-p)^{n-1} + p(1-p)^{n-1} + \cdots + p(1-p)^{n-1}$

$= np(1-p)^{n-1}$

$$P(X=x) = \begin{cases} \overbrace{A \cap A \cap A \cdots \cap A}^{x} \; A \overbrace{(A' \cap \cdots \cap A')}^{n-x} \\ \underbrace{A \cap A' \cap A \cap A' \cap \cdots \cap A \cap A' \cap \cdots \cap A'}_{x} \\ \vdots \end{cases}$$

Samsyn

$p^x(1-p)^{n-x}$

$p^x(1-p)^{n-x}$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = b(x; n, p)$$

Vi har ei binomisk forsøksrekkje dersom

1. n uavh. forsøk
2. Registrerer A eller A' kvar gong
3. $P(A) = p$ i kvart forsøk

La X vere talet på gonger A skjer. X vil då vere binomisk fordelt med parameter n og p

$$f(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Eks. 8 kvinner får behandling for beinskjørheit.

P(behandlinga hjelper) = 0.3

La X vere talet på kvinner som blir hjelpte av behandlinga.

$P(X=0) = \binom{8}{0}(0.3)^0 \cdot (0.7)^8 = (0.7)^8 = 0.058$

$P(X=3) = \binom{8}{3}(0.3)^3(0.7)^5 = \frac{8\cdot7\cdot6}{2\cdot3}(0.3)^3 \cdot 0.7^5 = 0.254$

$F(4) = P(X \le 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$= \binom{8}{0}(0.3)^0 \cdot 0.7^8 + \binom{8}{1}\cdot 0.3 \cdot 0.7^7 + \dots + \binom{8}{4} 0.3^4 \cdot 0.7^4$

$= 0.058 + 0.198 + 0.296 + 0.254 + 0.136 = \underline{0.942}$

NB! $P(X=x) = P(X \le x) - P(X \le x-1)$

Forventning og varians til binomisk fordelte variable

La $X_i = \begin{cases} 1 & \text{dersom } A \text{ skjer i } i\text{-te forsøk} \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

$\Rightarrow$ s.a. $E[X_i] = p$, $i = 1, 2, \dots, n$

$Var[X_i] = \sum_{i=1}^{2} (x_i - p)^2 P(X=x_i)$

$= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p)$

s.a. $E[X] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$

$Var[X] = Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] \overset{\text{p.g.a. uavh.}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$

Teorem 5.1

Andre eks. Tippekupongen 1 rekke, $n = 12$, $p = \frac{1}{3}$

$$P(X=12) = \binom{12}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \frac{1}{531\,441} = \frac{1}{3^{12}}$$

$$P(X=10) = \binom{12}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \frac{4}{3^{12}} = \frac{264}{3^{12}} = \underline{0{,}0005}$$

Binomisk fordeling

n uavh. forsøk

A	A'

A ~ maskin går i stykker på grunn av elektriske feil

X = antall på gonger A skjer

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

Multinomisk fordeling

n uavh. forsøk

elektriske feil	mekaniske feil	operatør feil
A	B	C

X_1 = antall på gonger A skjer, $P(A) = p_1$

X_2 = —"— , B skjer, $P(B) = p_2$

X_3 = —"— C skjer, $P(C) = p_3$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\,(n-x_1)!} \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!\,(n-x_1-x_2)!}\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

Generelt $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \dfrac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_k!}\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_n}$.